

**Exercice 1**

Par la méthode de Galerkin, déterminer une solution approchée de la forme faible de la conduction de chaleur en régime stationnaire pour un domaine unidimensionnel de longueur  $\ell$

$$T \in \mathcal{U} : \int_0^\ell \kappa (dT/dx)(d\delta T/dx) dx = \int_0^{\ell/2} q \delta T dx \quad \forall \delta T \in \mathcal{V}$$

avec les classes de fonctions  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} = \{w(x) \mid w(x) \in H^1([0, \ell]); w(0) = w(\ell) = 0\}$$

où les variables  $T$  et  $\delta T$  sont les températures réelle et virtuelle et où la grandeur  $\kappa$  désigne le coefficient de conductibilité thermique que l'on choisit constant, alors que  $w$  dénote indifféremment  $T$  ou  $\delta T$ . Le flux de chaleur  $q$  est admis constant pour  $0 < x < \ell/2$  et nul pour  $\ell/2 < x < \ell$ . Prendre un et deux termes polynomiaux pour l'approximation de Galerkin et comparer les résultats avec la solution exacte.

**Exercice 2**

Trouver la forme faible du flambage d'une poutre de Bernoulli-Euler (cisaillement négligé), sachant que la forme forte associée s'écrit

$$u(x) \in C^4([0, \ell]) : EI(d^4u/dx^4) + N(d^2u/dx^2) = 0 \quad 0 < x < \ell$$

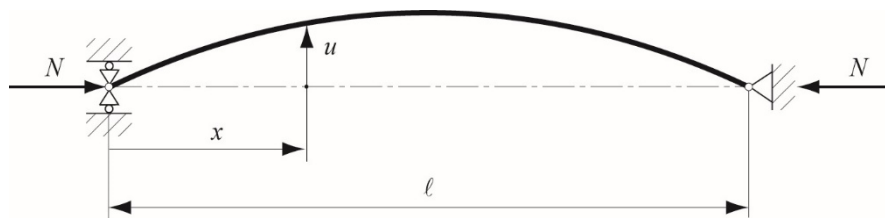
avec les conditions aux limites essentielles (déplacement nul aux extrémités)

$$u(0) = 0 \quad u(\ell) = 0$$

et naturelles (moment nul aux extrémités)

$$EI(d^2u/dx^2)\Big|_{x=0} = 0 \quad EI(d^2u/dx^2)\Big|_{x=\ell} = 0$$

où  $u(x)$  désigne la déformée de la poutre (déplacement transversal),  $E$  est le module d'élasticité du matériau,  $\ell$  dénote la longueur de la poutre,  $I$  représente le moment d'inertie de la section de la poutre et  $N$  est la charge de compression, la rigidité flexionnelle  $EI$  étant admise constante.



Rechercher par la méthode de Galerkin la charge critique  $N^h$  approchée du problème, en adoptant une approximation polynomiale de plus faible degré. Déterminer l'erreur sur la demi-longueur d'onde de flambage  $\ell_0$ , sachant que la charge critique exacte vaut  $N = \pi^2 EI / \ell_0^2$  avec  $\ell_0 = \ell$ .